JURNAL FOURIER | April 2022, Vol. 11, No. 1, 1-6 ISSN 2252-763X
DOI: 10.14421/fourier.2022.111.1-6 E-ISSN 2541-5239

Ideal Fuzzy Semiring Atas Level Subset

Saman Abdurrahman

Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Lambung Mangkurat.
Jl. A. Yani Km 36 Banjarbaru Kalimantan Selatan, 70123, Indonesia

Korespondensi: Saman Abdurrahman, Email: saman@ulm.ac.id

Abstrak

Semiring merupakan salah satu perluasan dari ring, dengan cara menghilangan salah satu aksioma pada operasi pertama yaitu aksioma invers. Pada semiring terdapat konsep subsemiring dan ideal dengan kondisi bahwa setiap ideal semiring adalah selalu subsemiring. Tetapi kondisi kebalikannya belum tentu berlaku. Selain konsep subsemiring dan ideal semiring, pada struktur semiring diperkenalkan konsep homomorfisma semiring. Kondisi ini, analog dengan homomorfisma di ring, sehingga sifat-sifat yang ada pada semiring dapat dinduksi dari sifat - sifat di ring, seperti konsep image dan preimage di bawah homomorfisma semiring analog dengan konsep image dan preimage di bawah homomorfisma ring. Konsep ideal pada semiring jika dipadukan dengan konsep *fuzzy*, akan menghasilkan konsep baru, yaitu konsep ideal *fuzzy* semiring. Pada makalah ini, akan diperkenalkan konsep ideal *fuzzy* semiring, image dan preimage ideal *fuzzy* dari suatu homomorfisma semiring. Lebih lanjut, akan diselidiki sifat-sifat ideal *fuzzy* semiring, image dan preimage ideal *fuzzy* dibawah homomorfisma semiring melalui suatu level subset.

Kata Kunci: Image; ideal *fuzzy*; homomorfisma semiring; level subset; preimage

Abstract

Semiring is one of the extensions of the ring by disappearing one of the axioms in the first operation, namely the inverse axiom. In semiring, there is the concept of subsemiring and ideal with the condition that every ideal semiring is always subsemiring. However, the opposite condition does not necessarily apply. In addition to the concept of subsemiring and the ideal of a semiring, in the semiring structure was introduced the concept of semiring homomorphism. This condition is analogous to the homomorphism in the ring so that the properties present in the semiring can be induced from the properties in the ring, such as the concept of image and preimage under the homomorphism of semiring analogous to the concept of image and preimage under the homomorphism of the ring. If combined with the fuzzy concept, the ideal concept in semiring will produce a new concept, namely the ideal concept of fuzzy semiring. This paper will introduce the concept of an ideal fuzzy semiring, image, and preimage ideal fuzzy from a semiring homomorphism. Furthermore, the properties of the fuzzy ideal semiring, image, and preimage of the fuzzy ideal will be investigated under the semiring homomorphism through a subset level.

Keywords: Image; ideal fuzzy; semiring homomorphism; level subset; preimage

Pendahuluan

Konsep himpunan *fuzzy* yang diperkenalkan [1], memberikan andil sangat besar bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satunya, pada bidang aljabar yang dimotori [2], memberikan banyak ide bagi peneliti berikutnya untuk melakukan penelitian pada struktur aljabar lainnya, diantaranya [3]–[6] melakukan penelitian pada struktur semiring.

Penelitian ini, merupakan lanjutan dari penelitian [6]. Pada penelitian [6], peranan level subset dari suatu semiring fuzzy sangat berperan pada sifat – sifat yang dimiliki oleh subsemiring *fuzzy*.

Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikaji peranan dari level subset dari suatu ideal *fuzzy* semiring atas kesohihan sifat – sifat ideal *fuzzy* semiring, image dan dan preimage suatu homomorfisma semiring. Sifat – sifat yang dikaji ini, diinduksi dari penelitian [7]–[13].

Landasan Teori

Berikut diberikan konsep – konsep yang akan digunakan pada bagian pembahasan, baik itu berupa definisi ataupun teorema.

Definisi 2.1. [14] *Suatu himpunan tidak kosong S disebut semiring jika pada S didefinisikan dua operasi biner, yaitu operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian $(\cdot)$ sedemikian sehingga $(S,+)$ merupakan semigrup abelian dan $(S,\cdot)$ adalah semigrup (tidak harus komutatif), serta berlaku sifat distributif kiri dan kanan, yaitu:*

$$b(c+d) = bc + bd \text{ dan } (b+c)d = bd + cd$$

untuk setiap $b, c, d \in S$.

Jika semigrup $(S,+)$ memuat elemen identitas, maka elemen ini disebut elemen nol pada semiring $(S,+,\cdot)$, yang dinotasikan dengan 0_S. Elemen 0_S pada semiring S, berifat:

$$s + 0_S = 0_S + s = s \text{ dan } s \cdot 0_S = 0_S \cdot s = 0_S$$

untuk setiap $s \in S$.

Selanjutnya pada tulisan ini, yang dimaksud semiring S adalah semiring yang memuat elemen 0_S, kecuali ada keterangan lebih lanjut.

Definisi 2.2. [14] *Subset tidak kosong I dari semiring S disebut ideal dari S jika untuk setiap $c, d \in I$ dan $s \in S$ dipenuhi kondisi:*

(1). $c + d \in I$,

(2). $c \cdot \boldsymbol{s} \in I$, *dan*

(3). $\boldsymbol{s} \cdot c \in I$.

Subset tidak kosong I dari S disebut **ideal kanan** dari S jika dipenuhi kondisi (1) dan (2), sedangkan I disebut **ideal kiri** dari S jika dipenuhi kondisi (1) dan (3). Selanjutnya pada tulisan ini, yang dimaksud ideal adalah ideal kiri, kecuali ada keterangan lebih lanjut.

Himpunan bilangan bulat non-negatif $\mathbb{N}_0$, dan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ adalah semiring atas operasi penjumlahan dan perkalian bilangan real. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, himpunan $n\mathbb{N}_0$ adalah ideal dari $\mathbb{N}_0$. Tetapi, $n\mathbb{N}$ bukan ideal dari $\mathbb{N}_0$, karena terdapat $0_{\mathbb{N}_0} \in \mathbb{N}_0$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{N}$,

$$0_{\mathbb{N}_0} \cdot a = a \cdot 0_{\mathbb{N}_0} = 0_{\mathbb{N}_0} \notin \mathbb{N}.$$

Definisi 2.3. [15] *Suatu pemetaan f dari semiring S ke semiring $S^\star$ disebut homomorfisma jika $f(a+c) = f(a) + f(c)$ dan $f(ac) = f(a)f(c)$ untuk setiap $a, c \in S$. Jika $f(S) = S^\star$, maka f disebut epimorfisma.*

Berikutnya diberikan definisi image, preimage dan ideal *fuzzy* semiring S, yang berkaitan dengan suatu subset *fuzzy* dari S. Menurut [16] subset *fuzzy* dari S adalah suatu fungsi $\alpha: S \longrightarrow [0,1]$. Koleksi subset fuzzy dari S, dinotasikan dengan $\mathcal{F}(S)$.

Definisi 2.4. [17] *Diberikan suatu fungsi $f: S \longrightarrow S^\star$.*

(1) Jika $\xi \in \mathcal{F}(S)$, maka f_ξ, Image dari ξ di bawah f, adalah $f_\xi \in \mathcal{F}(S^\star)$, yang didefinisikan dengan

$$f_\xi(c) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sup\limits_{f(s)=c} \xi(s), & f^{-1}(c) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(c) = \emptyset \end{cases}$$

untuk setiap $c \in S^\star$.

(2) Jika $\alpha \in \mathcal{F}(S^\star)$, maka f_α^{-1}, preimage dari α di bawah f, adalah $f_\alpha^{-1} \in \mathcal{F}(S)$, yang didefinisikan dengan

$$f_\alpha^{-1}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha[f(s)]$$

untuk setiap $s \in S$.

Definisi 2.5. [7] *subset fuzzy α dari semiring S merupakan ideal fuzzy dari S jika dan hanya jika*
(1). $\alpha(c+d) \geq \alpha(c) \wedge \alpha(d)$,
(2). $\alpha(c \cdot \boldsymbol{s}) \geq \alpha(c)$, *dan*
(3). $\alpha(\boldsymbol{s} \cdot c) \geq \alpha(c)$.

Subset *fuzzy* α dari S disebut **ideal kanan *fuzzy*** dari S jika dipenuhi kondisi (1) dan (2), sedangkan α disebut **ideal kiri *fuzzy*** dari S jika dipenuhi kondisi (1) dan (3). **Selanjutnya pada tulisan ini, yang dimaksud ideal *fuzzy* adalah ideal kiri *fuzzy***, kecuali ada keterangan lebih lanjut.

Definisi 2.6. [7] *Jika α subset fuzzy dari semiring S dan $x \in [0,1]$, maka himpunan $\alpha_x \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in S \mid \alpha(s) \geq x\}$ disebut $x -$ level subset dari α.*

Hasil dan Pembahasan

Teorema 3.1. *Jika α adalah ideal fuzzy dari semiring S, maka $\alpha(0_S) \geq \alpha(s)$ untuk setiap $s \in S$.*
Bukti. Mengingat S adalah semiring yang memuat 0_S dan α adalah ideal kiri *fuzzy* dari S. Berarti, untuk setiap $s \in S$, dipenuhi kondisi:
$$0_S \cdot s = 0_S$$
sedemikian sehingga
$$\alpha(0_S) = \alpha(0_S \cdot s) \geq \alpha(s). \ \blacksquare$$

Teorema 3.2. *Diberikan subset fuzzy α dari semiring S. Jika α adalah ideal fuzzy dari S, maka level subset α_x $(x \leq \alpha(0_S))$ adalah ideal dari S, untuk setiap $x \in [0,1]$.*
Bukti. Misalkan α adalah ideal *fuzzy* dari S. Akan dibuktikan level subset α_x $(x \leq \alpha(0_S))$ adalah ideal dari S, untuk setiap $x \in [0,1]$.
Berdasarkan definisi α_x, diperoleh $\alpha_x \subseteq S$. Karena $\alpha(0_S) \geq x$, untuk setiap $x \in [0,1]$, berarti: $0_S \in \alpha_x$. Dengan kata lain, $\alpha_x \neq \emptyset$.
Diambil sebarang $a, d \in \alpha_x$ dan $s \in S$, berarti:
$$\alpha(a) \geq x \text{ dan } \alpha(d) \geq x.$$
Karena α adalah ideal fuzzy dari S, diperoleh:
$$\alpha(a+d) \geq \alpha(a) \wedge \alpha(d) \geq x$$
dan
$$\alpha(s \cdot a) \geq \alpha(a) \geq x.$$
Akibatnya,
$$a + d \in \alpha_x \text{ dan } sa \in \alpha_x.$$
Jadi, α_x adalah ideal dari S. $\blacksquare$

Teorema 3.3. *Diberikan subset fuzzy α dari semiring S. Jika level subset α_x adalah ideal dari S untuk setiap x $(\leq \alpha(0_S))$, maka α adalah ideal fuzzy dari S.*
Bukti. Misalkan level subset α_x $(x \leq \alpha(0_S))$ adalah ideal dari S, untuk setiap $x \in [0,1]$. Akan dibuktikan α adalah ideal *fuzzy* dari S.
Diambil sebarang $a, d \in S$. Karena $\alpha \in \mathcal{F}(S)$, berarti ada $x_1, x_2 \in [0,1]$ sedemikian sehingga $\alpha(a) = x_1$ dan $\alpha(d) = x_2$. Misalkan $x = x_1 \wedge x_2$. Akibatnya, $\alpha(a) \geq x$ dan $\alpha(d) \geq x$, yaitu: $a \in \alpha_x$ dan $d \in \alpha_x$. Karena α_x adalah ideal dari S, untuk setiap $x \in [0,1]$, berarti dipenuhi kondisi:
$$a + d \in \alpha_x.$$
Oleh karena itu,
$$\alpha(a+d) \geq x = x_1 \wedge x_2 = \alpha(a) \wedge \alpha(d).$$
Selanjutnya, Andaikan terdapat $s_0, a_0 \in S$ sedemikian sehingga $\alpha(s_0 \cdot a_0) < \alpha(a_0)$.
Dipilih

$$x_0 = \frac{1}{2}(\alpha(s_0 \cdot a_0) + \alpha(a_0).).$$

Oleh karena itu,

$$\alpha(s_0 \cdot a_0) < x_0 < \alpha(a_0).$$

Akibatnya,

$$s_0 \cdot a_0 \notin \alpha_{x_0} \text{ dan } a_0 \in \alpha_{x_0}.$$

Dengan kata lain, α_{x_0} bukan ideal dari S. Kondisi ini, kontradiksi dengan α_x adalah ideal dari S, untuk setiap $x \in [0,1]$, sehingga pengandaian salah, seharusnya untuk setiap $s, a \in S$ dipenuhi kondisi $\alpha(sa) \geq \alpha(a)$. ■

Teorema 3.4. *Diberikan A adalah subset tidak kosong dari semiring S dan $\alpha_A \in \mathcal{F}(S)$ sedemikian sehingga*

$$\alpha_A(a) = \begin{cases} x, & a \in A \\ y, & a \in S - A \end{cases}$$

untuk setiap $x \in S$ dan $y < x$. Subset fuzzy α_A dari S adalah ideal fuzzy dari S jika dan hanya jika A adalah ideal dari S.

Bukti. ($\Longrightarrow$) Misalkan A adalah subset tidak kosong dari semiring S dan α_A adalah ideal *fuzzy* dari S. Akan dibuktikan A adalah ideal dari S.

Diambil sebarang $a, c \in A$ dan $s \in S$. Berarti, $\alpha_A(a) = x$ dan $\alpha_A(c) = x$.

Oleh karena itu,

$$\alpha_A(a + c) \geq \alpha_A(a) \wedge \alpha_A(c) = x \text{ dan } \alpha_A(sa) \geq \alpha_A(a) = x$$

Akibatnya,

$$a + c \in A \text{ dan } sa \in A.$$

Jadi, A adalah ideal dari S.

($\Longleftarrow$) Misalkan A adalah ideal dari S dan $\alpha_A \in \mathcal{F}(S)$. Akan dibuktikan α_A adalah ideal *fuzzy* dari S.

Diambil sebarang $a, s \in S$. Berarti, ada tiga kemungkinan keanggotaan a dan s, bila dikaitkan dengan A, yaitu:

(1) $a, s \in A$. Karena A adalah ideal dari S, diperoleh: $a + c \in A$ dan $sa \in A$. Oleh karena itu,

$$\alpha_A(a + s) = x = \alpha_A(a) \wedge \alpha_A(c) \text{ dan } \alpha_A(sa) = \alpha_A(a) = x = \alpha_A(a).$$

(2) Salah satu dari a dan s adalah termuat di A, misalkan $a \in A$ dan $s \notin A$. Karena A adalah ideal dari S, diperoleh: $sa \in A$. Akibatnya:

$$\alpha_A(a + s) \geq y = \alpha_A(a) \wedge \alpha_A(c) \text{ dan } \alpha_A(sa) \geq x = \alpha_A(a).$$

(3) $a, s \notin A$. Berdasarkan kondisi ini, diperoleh kemungkinan nilai keanggotaan $a + s$ dan sa, yaitu:

$$\alpha_A(a + s) \geq y = \alpha_A(a) \wedge \alpha_A(c) \text{ dan } \alpha_A(sa) \geq y = \alpha_A(a).$$

Berdasarkan hasil Analisa di atas, diperoleh:

$$\alpha_A(a + c) \geq \alpha_A(a) \wedge \alpha_A(c) \text{ dan } \alpha_A(sa) \geq \alpha_A(a)$$

Untuk setiap $a, s \in S$. Dengan kata lain, α_A adalah ideal *fuzzy* dari S. ■

Akibat 3.5. *Diberikan A adalah subset tidak kosong dari semiring S. Fungsi karakteristik dari A adalah ideal fuzzy dari S jika dan hanya jika A adalah ideal dari S.*

Bukti. Misalkan fungsi karakteristik dari A adalah η_A sedemikian sehingga

$$\eta_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \in S - A \end{cases}$$

untuk setiap $x \in S$. Oleh karena itu, dengan mengambil kondisi nilai $x = 1$ dan $y = 0$ pada Teorema 3.4, kebenaran dari Akibat 3.5 telah terbukti. ■

Teorema 3.6. *Diberikan $f: S \longrightarrow S^\star$ epimorfisma semiring. Jika α adalah ideal fuzzy dari S, maka bayangan dari level subset α_x di bawah f, dinotasikan dengan $f(\alpha_x)$, adalah ideal dari $S^\star$, untuk setiap $x \in Im\, \alpha$.*

Bukti. Misalkan $f: S \longrightarrow S^\star$ homomorfisma semiring dan α adalah ideal *fuzzy* dari S. Akan dibuktikan $f(\alpha_x)$ adalah ideal dari $S^\star$, untuk setiap $x \in Im\ \alpha$.
Karena α adalah ideal *fuzzy* dari S, berdasarkan Teorema 3.2, diperoleh α_x adalah ideal dari S. Akibatnya, $f(\alpha_x) \subseteq S^\star$ dan $f(\alpha_x) \neq \emptyset$.
Diambil sebarang $a^\star, d^\star \in f(\alpha_x)$ dan $s^\star \in S^\star$. Berarti ada $a, d \in \alpha_x$ dan $s \in S$ sedemikian sehingga $f(a) = a^\star$, $f(d) = d^\star$, dan $f(s) = s^\star$. Oleh karena itu,

$$a^\star + d^\star = f(a) + f(d) = f\,\underbrace{(a + d)}_{\in \alpha_x} \text{ dan } s^\star a^\star = f(s)f(a) = f\,\underbrace{(sa)}_{\in \alpha_x}.$$

Akibatnya,

$$a^\star + d^\star \in f(\alpha_x) \text{ dan } s^\star a^\star \in f(\alpha_x).$$

Jadi, $f(\alpha_x)$ adalah ideal dari $S^\star$. ■

Teorema 3.7. *Diberikan $f: S \longrightarrow S^\star$ epimorfisma semiring. Jika α adalah ideal fuzzy dari S, maka f_α, image dari α di bawah f, adalah ideal fuzzy dari $S^\star$.*
Bukti. Misalkan $f: S \longrightarrow S^\star$ epimorfisma semiring dan α adalah ideal *fuzzy* dari S. Akan dibuktikan f_α adalah ideal *fuzzy* dari $S^\star$.
Misalkan $x \in Im\, f_\alpha$, berarti terdapat $s^\star \in S$, $f_\alpha(s^\star) = \sup_{s \in f^{-1}(s^\star)} \alpha(s) = x$, sedemikian sehingga $x \leq \alpha(0_S)$ dan α_x adalah ideal dari S. Jika $x = 0$, maka $(f_\alpha)_x = S^\star$. Jika $x > 0$, maka $(f_\alpha)_x = f(\alpha_x)$, karena

$$\begin{aligned} d \in (f_\alpha)_x &\Leftrightarrow f_\alpha(d) \geq x \\ &\Leftrightarrow \sup_{s \in f^{-1}(d)} \alpha(s) \geq x \\ &\Leftrightarrow \text{terdapat } a \in S \text{ sedemikian sehingga } f(a) = d \text{ dan } \alpha(a) \geq x \\ &\Leftrightarrow d \in f(\alpha_x). \end{aligned}$$

Mengingat $(f_\alpha)_x = f(\alpha_x)$, berarti berdasarkan Teorema 3.6, $(f_\alpha)_x$ adalah ideal dari $S^\star$. Akibatnya, berdasarkan Teorema 3.3, f_α adalah ideal *fuzzy* dari $S^\star$.■

Teorema 3.8. *Diberikan $f: S \longrightarrow S^\star$ homomorfisma semiring. Jika $\alpha^\star$ adalah ideal fuzzy dari $S^\star$, maka $f^{-1}((\alpha^\star)_x) = \{s \in S \mid f(s) \in (\alpha^\star)_x\}$ adalah ideal dari S, untuk setiap $x \in Im\ \alpha^\star$.*
Bukti. Misalkan $f: S \longrightarrow S^\star$ homomorfisma semiring dan $\alpha^\star$ adalah ideal fuzzy dari $S^\star$. Akan dibuktikan $f^{-1}((\alpha^\star)_x) = \{s \in S \mid f(s) \in (\alpha^\star)_x\}$ adalah ideal dari S, untuk setiap $x \in Im\ \alpha^\star$.
Karena $\alpha^\star$ adalah ideal *fuzzy* dari $S^\star$, berdasarkan Teorema 3.2, diperoleh $(\alpha^\star)_x$ adalah ideal dari $S^\star$, untuk setiap $x \in \alpha^\star$. Karena $0_{S^\star} \in (\alpha^\star)_x$ dan $f(0_S) = 0_S^\star$, diperoleh $0_S \in f^{-1}((\alpha^\star)_x)$ sedemikian sehingga $f^{-1}((\alpha^\star)_x) \neq \emptyset$. Lebih lanjut, menurut definisi $f^{-1}((\alpha^\star)_x)$, diperoleh $f^{-1}((\alpha^\star)_x) \subseteq S$.
Diambil sebarang $a, c \in f^{-1}((\alpha^\star)_x)$ dan $s \in S$. Berarti $f(a), f(c) \in (\alpha^\star)_x$ dan $f(s) \in S^\star$. Karena $(\alpha^\star)_x$ adalah ideal dari $S^\star$, diperoleh:

$$f(a) + f(c) = f(a + c) \in (\alpha^\star)_x \text{ dan } f(s)f(a) = f(sa) \in (\alpha^\star)_x.$$

Akibatnya,

$$a + c \in f^{-1}((\alpha^\star)_x) \text{ dan } sa \in f^{-1}((\alpha^\star)_x).$$

Jadi, $f^{-1}((\alpha^\star)_x)$ adalah ideal dari S. ■

Teorema 3.9. *Diberikan $f: S \longrightarrow S^\star$ homomorfisma semiring. Jika $\alpha^\star$ adalah ideal fuzzy dari S, maka $f_{\alpha^\star}^{-1}$, preimage dari $\alpha^\star$ di bawah f, adalah ideal fuzzy dari S.*
Bukti. Misalkan $: S \longrightarrow S^\star$ homomorfisma semiring dan $\alpha^\star$ adalah ideal fuzzy dari $S^\star$. Akan dibuktikan $f_{\alpha^\star}^{-1}$ adalah ideal *fuzzy* dari S.
Karena $\alpha^\star$ adalah ideal *fuzzy* dari $S^\star$, berarti berdasarkan Teorema 3.2, $(\alpha^\star)_x$ untuk setiap $x \in Im\ \alpha^\star$. Akibatnya, berdasarkan Teorema 3.8, $f^{-1}((\alpha^\star)_x)$ adalah ideal dari S.
Selanjutnya, ditinjau dua kasus, yaitu:

1) Untuk $x = 0$, diperoleh $\left(f_{\alpha^\star}^{-1}\right)_x = S$
2) Untuk $x > 0$, diperoleh $\left(f_{\alpha^\star}^{-1}\right)_x = f^{-1}((\alpha^\star)_x)$. Karena,

$$c \in \left(f_{\alpha^\star}^{-1}\right)_x \Leftrightarrow x \leq f_{\alpha^\star}^{-1}(c) = \alpha^\star(f(c)) \Leftrightarrow f(c) \in (\alpha^\star)_x \Leftrightarrow c \in f^{-1}((\alpha^\star)_x).$$

Mengingat $f^{-1}((\alpha^\star)_x) = \left(f_{\alpha^\star}^{-1}\right)_x$, berarti berdasarkan Teorema 3.6, $\left(f_{\alpha^\star}^{-1}\right)_x$ adalah ideal dari S. Akibatnya, berdasarkan Teorema 3.3, $f_{\alpha^\star}^{-1}$ adalah ideal *fuzzy* dari S.■

Kesimpulan

Level subset dari suatu ideal *fuzzy* semiring, sangat berperan dalam membuktikan kesohihan sifat – sifat ideal *fuzzy* pada suatu semiring, dan menjamin bahwa image dan preimage homomorfisma ideal *fuzzy* pada suatu semiring adalah ideal *fuzzy* semiring.

Referensi

[1] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets," *Inf. Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965, doi: https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X.

[2] A. Rosenfeld, "Fuzzy groups," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 35, no. 3, pp. 512–517, Sep. 1971, doi: 10.1016/0022-247X(71)90199-5.

[3] S. Abdurrahman, "Interior ideal fuzzy semiring," *Epsil. J. Mat. Murni Dan Terap.*, vol. 15, no. 2, pp. 116–123, 2021, doi: ttps://doi.org/10.20527/epsilon.v15i2.4894.

[4] S. Abdurrahman, C. Hira, and A. Hanif Arif, "Anti subsemiring fuzzy," *Epsil. J. Mat. Murni Dan Terap.*, vol. 16, no. 1, pp. 83–92, 2022, doi: https://doi.org/10.20527/epsilon.v16i1.5443.

[5] S. Abdurrahman, "ω – fuzzy subsemiring.pdf," *J. Mat. Sains, dan Teknol.*, vol. 21, no. 1, pp. 1–10, 2020, doi: https://doi.org/10.33830/jmst.v21i1.673.2020.

[6] S. Abdurrahman, "Karakteristik subsemiring fuzzy," *J. Fourier*, vol. 9, no. 1, pp. 19–23, 2020, doi: 10.14421/fourier.2020.91.19-23.

[7] J. Ahsan, J. N. Mordeson, and M. Shabir, "Fuzzy Ideals of Semirings," in *Fuzzy Semirings with Applications to Automata Theory*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 15–29.

[8] M. Akram and W. A. Dudek, "Intuitionistic fuzzy left k-ideals of semirings," *Soft Comput.*, vol. 12, no. 9, pp. 881–890, 2008, doi: 10.1007/s00500-007-0256-x.

[9] S. Ghosh, "Fuzzy k-ideals of semirings," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 95, pp. 103–108, 1998.

[10] S. Kar, S. Purkait, and K. P. Shum, "Interval-valued fuzzy k-quasi-ideals and k-regularity of semirings," *Afrika Mat.*, vol. 26, no. 7–8, pp. 1413–1425, 2015, doi: 10.1007/s13370-014-0296-1.

[11] C. B. Kim, "Isomorphism theorems and fuzzy k-ideals of k-semirings," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 112, no. 2, pp. 333–342, 2000, doi: 10.1016/S0165-0114(98)00018-9.

[12] M. O. Massa'deh and A. Fellatah, "Some properties on intuitionistic Q-fuzzy k-ideals and k–Q-fuzzy ideals in Γ -semirings," *Afrika Mat.*, 2019.

[13] J. Neggers, Y. B. A. E. Jun, and H. E. E. S. I. K. Kim, "On L-fuzzy ideals in semiring II," *Czechoslov. Math. J.*, vol. 49, no. 124, pp. 127–133, 1999.

[14] J. S. Golan, "Semirings," in *Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications*, Centrefor Mathematics and Computer Science, Amsterdam, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 1–26.

[15] P. J. Allen, "A Fundamental Theorem of Homomorphisms for Semirings," *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 21, no. 2, pp. 412–416, 1969, doi: 10.2307/2037016.

[16] M. Jezewski, R. Czabanski, and J. Leski, "Introduction to Fuzzy Sets," in *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers: A Tribute to Professor Witold Kosiński*, P. Prokopowicz, J. Czerniak, D. Mikołajewski, Ł. Apiecionek, and D. Ślęzak, Eds. Cham: Springer International Publishing, 2017, pp. 3–22.

[17] J. N. Mordeson, K. R. Bhutani, and A. Rosenfeld, "Fuzzy Subsets and Fuzzy Subgroups BT - Fuzzy Group Theory," J. N. Mordeson, K. R. Bhutani, and A. Rosenfeld, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005, pp. 1–39.